



EXAMEN

P1. Para $\alpha \in (0, 1)$, se denota por \mathcal{R} la región encerrada por la curva $f(x) = x^\alpha$, el eje OY y la recta tangente a x^α en el punto $x_0 = 1$.

- a) (2,0 ptos.) Demostrar que el área de la región \mathcal{R} está dada por $A = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$.
- b) (2,0 ptos.) Demostrar que el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región \mathcal{R} en torno al eje OY está dado por $V_{OY} = \pi \frac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}$.
- c) (2,0 ptos.) Para el caso $\alpha = \frac{2}{3}$, calcule el perímetro de la región \mathcal{R} .

P2. Sean $f, g : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ con $g'(t) > 0$, $t \geq 1$. Considere la siguiente parametrización de una curva $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$r(t) = (f(t) \cos(g(t)), f(t) \sin(g(t)), f(t)).$$

- a) (1,0 pto.) Demostrar que $\|r'(t)\| = \sqrt{2(f'(t))^2 + f^2(t)(g'(t))^2}$.
- b) (1,5 ptos.) Para $f(t) = \frac{1}{t}$ y $g(t) = t$, determinar si la longitud de Γ es convergente.
- c) (2,0 ptos.) Para $f(t) = t$ y $g(t) = \sqrt{2} \ln t$ calcular $T(t)$, $N(t)$ y $\kappa(t)$ (curvatura).
- d) (1,5 ptos.) Para $f(t) = 1$, calcular el vector binormal B y la torsión τ .

P3. a) (2,0 ptos.) Sean (a_n) y (b_n) sucesiones tales que $e^{a_n} = a_n + e^{b_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Verifique que si $a_n > 0$ entonces $b_n > 0$ y demuestre que

$$\sum_{n \geq 0} \text{converge} \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{a_n} \text{ converge.}$$

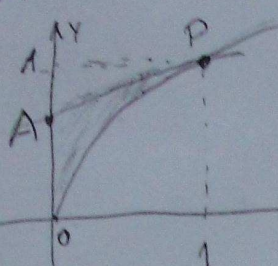
- b) (2,0 ptos.) Demuestre que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ converge y calcúlela.
- c) (2,0 ptos.) Estudie la convergencia absoluta y condicional de $\sum_{n \geq 2} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$.

Tiempo 3,0 horas

Examen Cálculo Dif. e Integral (2011-2)

Punto Problema 1

$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.



El punto de tangencia es $P(1,1)$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1} \rightarrow y'(1) = \alpha$$

Tangente: $y-1 = \alpha(x-1)$

o bien $y = 1 + \alpha(x-1)$

Defin, la región R es $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge x^\alpha \leq y \leq 1 + \alpha(x-1)\}$

Área de R es $A = \int_0^1 [1 + \alpha(x-1) - x^\alpha] dx = \left[x + \frac{\alpha}{2}(x-1)^2 - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{\alpha+1} - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow A = \frac{2+2-\alpha-\alpha^2}{2(\alpha+1)} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$$

El volumen V_{0y} de $V_{0y} = 2\pi \int_0^1 x [1 + \alpha(x-1) - x^\alpha] dx$

$$= 2\pi \int_0^1 (x + \alpha(x^2 - x) - x^{\alpha+1}) dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\alpha x^3}{3} - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{x^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{\alpha+2} \right] = 2\pi \frac{3\alpha+6+2\alpha^2+4\alpha-3\alpha^2-6\alpha-6}{6(\alpha+2)} = 2\pi \frac{\alpha-\alpha^2}{3(\alpha+2)}$$

Significa que $V_{0y} = \pi \frac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}$

c) Perímetro de la región $R = \widehat{OPA}$ en $y = x^{2/3}$ ($\alpha = 2/3$)

Recta PA: $y-1 = \frac{2}{3}(x-1) \rightarrow$ Pero A: $x=0, y=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3} \rightarrow A(0, \frac{1}{3})$

Defin, $\overline{PA} = \sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2} = \sqrt{(0-1)^2 + (\frac{1}{3}-1)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9}} = \frac{5}{3}$

$\overline{OA} = y_A = \frac{1}{3}$

$\Delta_{OP} = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{9}x^{-2/3}} dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{9x^{2/3} + 4}}{x^{1/3}} dx$

Reemplazando $u = 9x^{2/3} + 4$
 $du = 9 \cdot \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{6 dx}{x^{1/3}} \Rightarrow \Delta_{OP} = \frac{1}{6} \int_4^{13} u^{1/2} du = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} [u^{3/2}]_4^{13} = \frac{1}{9} [13^{3/2} - 8]$

Significa que el perímetro de R es: $\overline{PA} + \overline{OA} + \widehat{OP} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}[13^{3/2} - 8]$

Examen Cálculo Diferencial (2001-2)

Parte Problema 2

a) $r'(t) = (f' \cos(g) + f g' (-\sin(g)), f' \sin(g) + f g' \cos(g), f')$

$$\Rightarrow \|r'(t)\|^2 = (f')^2 \cos^2(g) - 2f'f g' \sin(g) \cos(g) + f^2 (g')^2 \sin^2(g) + (f')^2 \sin^2(g) + 2f'f g' \sin(g) \cos(g) + f^2 (g')^2 \cos^2(g) + (f')^2$$

$$= (f')^2 + f^2 (g')^2 + (f')^2 = 2(f')^2 + f^2 (g')^2$$

$$\Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{2(f')^2 + f^2 (g')^2} \rightarrow (1.0)$$

b) $f(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow f' = -\frac{1}{t^2}$; $g(t) = t \Rightarrow g' = 1$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{2\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 \cdot 1^2} = \sqrt{\frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{t^2} + 1} \quad t \geq 1 \rightarrow (0.5)$$

Arz. $L(T) = \int_1^\infty \|r'(t)\| dt = \int_1^\infty \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{t^2} + 1} dt$ pues $\frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{t^2} + 1} \geq \frac{1}{t}$

y $\int_1^\infty \frac{1}{t} dt = +\infty \Rightarrow L(T) = \infty$, no es convergente. $\rightarrow (1.0)$

c) $f(t) = t \Rightarrow f' = 1$; $g(t) = \sqrt{2} \ln t \Rightarrow g'(t) = \frac{\sqrt{2}}{t}$

Entonces $r'(t) = (\cos(g) - \sqrt{2} \sin(g), \sin(g) + \sqrt{2} \cos(g), 1)$

$$\Rightarrow \|r'(t)\| = \sqrt{2(1)^2 + t^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{t}\right)^2} = 2$$

Vector Tangente $T(t) = \frac{r'(t)}{\|r'(t)\|} = \frac{1}{2} (\cos(g) - \sqrt{2} \sin(g), \sin(g) + \sqrt{2} \cos(g), 1) \rightarrow (0.5)$

$$T'(t) = \frac{1}{2} g' (-\sin(g) - \sqrt{2} \cos(g), \cos(g) - \sqrt{2} \sin(g), 0)$$

$$\|T'(t)\|^2 = \frac{1}{4} (g')^2 (1+2) = \frac{3}{4} (g')^2 \Rightarrow \|T'(t)\| = g'(t) \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow (0.5)$$

Vector Normal $N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-\sin(g) - \sqrt{2} \cos(g), \cos(g) - \sqrt{2} \sin(g), 0) \rightarrow (0.5)$

Curvatura $K(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{g'(t) \frac{\sqrt{3}}{2}}{2^3} = \frac{\sqrt{3}}{4} g'(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{t} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}}{t}, t \geq 1 \rightarrow (0.5)$

d) $f(t) = 1 \Rightarrow r(t) = (\cos(g), \sin(g), 1) \Rightarrow$ es curva plana $\Rightarrow \tau = \text{Torsión} = 0 \rightarrow (0.5)$

$r'(t) = g'(t) (-\sin(g), \cos(g), 0) \Rightarrow T(t) = (-\sin(g), \cos(g), 0)$ y $N(t) = (-\cos(g), -\sin(g), 0)$

$B = T \times N = (0, 0, 1)$ $\rightarrow (1.0)$

Examen Cálculo (Der. e Integral (2011-2)
Prueba Problemas 3

a) $(a_n), (b_n)$ tales que $e^{a_n} = a_n + e^{b_n} \quad \forall n$

Se sabe que $e^x \geq 1+x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, así $e^{a_n} > 1+a_n$, en $a_n > 0$

0.5) Entonces $e^{a_n} = a_n + e^{b_n} > 1+a_n \Rightarrow e^{b_n} > 1 \Rightarrow b_n > 0$

Además, $\sum a_n$ converge, $\Rightarrow \lim a_n = 0$ y de la relación dada,

0.5) despidiendo $b_n = \ln(e^{a_n} - a_n) \rightarrow 0$

Usando el criterio de comparación por cociente, calculamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n/a_n}{a_n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{a_n} - a_n)}{a_n^2} \stackrel{\text{L'Hop}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^{a_n} - 1}{e^{a_n} - a_n}}{2a_n(e^{a_n} - a_n)} = \frac{1}{2} \neq 0$$

1.0) y como $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n/a_n$ converge.

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$. Se puede usar la comparación $\ln x \leq x-1$.

Entonces $\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) \leq \frac{n^2}{n^2-1} - 1 = \frac{1}{n^2-1}$ y como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ conv. entonces

1.0) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ converge.

Para calcular la serie, veamos que $\sum_{k=2}^n \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^n [2\ln(k) - \ln(k^2-1)]$

Segue que la suma parcial n -ésima es $S_n = \sum_{k=2}^n 2\ln(k) - \ln(k^2-1)$

0.5) $= \sum_{k=2}^n [\ln k - \ln(k+1) + \ln k - \ln(k-1)] = \sum_{k=2}^n [\ln(k) - \ln(k+1)] + \sum_{k=2}^n [\ln(k) - \ln(k-1)]$

ambos sumas telescópicas. Así $S_n = \ln 2 - \ln(n+1) + \ln n - \ln(1)$

0.5) Sigue que $S_n = \ln \frac{2n}{n+1} \rightarrow \ln 2$. Entonces $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \ln 2$

0.5) También se puede usar comparación por cociente poniendo la serie $\sum 1/n^2$ en la comparación. Sigue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2} \rightarrow e = 1 \neq 0$$

y como $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)$ también converge.

c) La serie $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ es serie tipo Leibnitz

por $\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ decrece (por $n, \ln(n)$ y $\sqrt{\ln(n)}$) y $\frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} \rightarrow 0$

→ Por lo tanto $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ converge.

Ahora la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ se

puede estudiar usando el criterio de la integral con $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

donde $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \geq 0$ y decrece en $[2, \infty)$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u}} = \int_{\ln 2}^{\infty} u^{-1/2} du = \lim_{x \rightarrow \infty} [2\sqrt{u} - 2\sqrt{\ln 2}] \rightarrow \infty$$

$$\begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{array}$$

Segue que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ diverge

→ Entonces $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ es condicionalmente convergente